Obsah

1 Chyby merania

Fyzikálne veličiny vždy meriame s určitou nepresnosťou. Zdrojmi tejto nepresnosti môžu byť experimentátor, nepresné meracie prístroje, meniace sa podmienky merania ako napr. tlak, teplota, vlhkosť atď., ako aj vonkajšie rušivé vplyvy, napr. magnetické pole, tepelné žiarenie. Skutočnú hodnotu meranej veličiny teda nevieme nikdy presne určiť. Pomocou metód teórie chýb, o ktorých stručne pojednáme v tejto časti, však vieme určiť hodnotu najpravdepodobnejšiu.

1.1 Náhodné a systematické chyby

Chyby merania delíme na dve hlavné skupiny – náhodné a systematické. Náhodné chyby sa prejavujú tým, že opakované merania nejakej veličiny dávajú rôzne hodnoty. Systematické chyby skresľujú výsledky merania vždy určitým spôsobom, napr. výsledok merania vždy zväčšujú alebo zmenšujú. Nedajú sa teda určiť na základe opakovaných meraní.

Rozdiel medzi systematickými a náhodnými chybami si môžeme ukázať na nasledujúcom príklade. Predpokladajme, že stopkami meriame čas trvania nejakého fyzikálneho procesu. Jedným zo zdrojov chyby je náš čas reakcie pri spustení a zastavení stopiek. Keby časy našej reakcie boli v oboch prípadoch tie isté, navzájom by sa vyrušili. V skutočnosti však niekedy zareagujeme rýchlejšie a niekedy pomalšie. Napr. môžeme reagovať pomalšie pri spustení stopiek, takže nameriame kratšiu dobu ako je skutočná doba trvania procesu. Alebo môžeme zareagovať pomalšie pri zastavení stopiek, a tak namerať väčšiu dobu trvania, ako je skutočná. Keďže obe možnosti sú rovnako pravdepodobné, chyba merania bude náhodná. Keby sme opakovali meranie niekoľkokrát, niekedy by sme namerali väčšie doby, niekedy menšie doby trvania procesu. To znamená, že rôznosť v časoch našich reakcií pri spustení a zastavení stopiek by sa prejavila v rôznych hodnotách času trvania procesu získaných opakovanými meraniami. Na druhej strane, ak naše stopky meškajú, nameriame vždy menšie hodnoty, ako je skutočná hodnota. Ak idú prirýchlo, nameriame vždy väčšie hodnoty v porovnaní so skutočnou hodnotou. Meranie je teda zaťažené systematickou chybou a nijaký počet opakovaných meraní by nám nepomohol túto chybu zistiť.

Vyhodnocovanie systematických chýb, ba dokonca už ich detekovanie, obyčajne býva veľmi ťažké a je postavené na úplne iných princípoch, ako vyhodnocovanie náhodných chýb. Vo výklade, ktorý nasleduje, budeme predpokladať, že systematické chyby sú veľmi malé v porovnaní s požadovanou presnosťou merania. Metódy spracovania chýb, ktoré uvedieme, sa teda budú vzťahovať na prípad, keď je meranie zaťažené len náhodnou chybou.

1.2 Aritmetický priemer a stredná kvadratická chyba

Predpokladajme, že meriame veličinu x a že sme identifikovali všetky možné zdroje systematických chýb a zredukovali sme ich na zanedbateľnú úroveň. Keďže všetky ostatné zdroje chyby sú náhodné, mali by sme byť schopní ich detekovať opakovanými meraniami x. Urobme teda N meraní veličiny x, $x_1, x_2, ..., x_N$. V časti 1.5 dokážeme, že náš najlepší odhad skutočnej hodnoty x_{no} je aritmetický priemer nameraných hodnôt $\bar{x}$

$$x_{no} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}. \tag{1.1}$$

Naším cieľom je nájsť veličinu, ktorá by vystihovala presnosť nášho merania. Preto označme chybu i-teho merania $X - x_i$, kde X je skutočná hodnota veličiny x. Túto skuto4n[hodnotu však nepoznáme. Vieme ale vypočítať jej najlepší odhad – aritmetický priemer všetkých N meraní (1.1). Za dobrý odhad chyby i-teho merania môžeme teda považovať veličinu.

$$\varepsilon_i = \bar{x} - x_i. \tag{1.2}$$

Ak urobíme veľký počet meraní, budeme mať zhruba rovnaký počet chýb kladných a záporných. Keby sme všetky tieto chyby sčítali, dostali by sme výsledok veľmi blízky nule. Aritmetický priemer chýb ε_i by teda nebol veľmi dobrým ohodnotením nepresnosti nášho merania. Môžeme však umocniť všetky chyby ε_i na druhú, čím získame len kladné čísla a z týchto kladných čísel vypočítať aritmetický priemer. Potom môžeme definovať veličinu nazývanú **stredná kvadratická chyba** vzťahom

$$\delta_x = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + ... + (\bar{x} - x_N)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}}. \tag{1.3}$$

Veličina (1.3) je mierou presnosti nášho merania. Druhá odmocnina zabezpečuje, že jej rozmer je taký istý ako rozmer meranej veličiny x. V praxi sa častejšie používa pre strednú kvadratickú chybu výraz

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N - 1}}, \tag{1.4}$$

ktorý budeme aj my v ďalšom výklade považovať za definíciu strednej kvadratickej chyby.

Číslo (1.4) znamená, že pravdepodobnosť, že jedno meranie padne do intervalu $(X - \delta_x, X + \delta_x)$ je približne 68%. Platnosť tohto tvrdenia ukážeme v časti 1.5. Preto veličinu definovanú rovnicou (1.4) nazývame aj **stredná kvadratická chyba jedného merania**. My sme však neurobili len jedno meranie, ale veľký počet meraní a vypočítali sme z nich náš najlepší odhad skutočnej hodnoty – aritmetický priemer. Preto nás zaujíma nepresnosť, s akou sme určili aritmetický priemer všetkých meraní. Bez dôkazu uvádzame, že táto nepresnosť je dobre ohodnotená výrazom

$$\bar{\delta}_x = \frac{\delta_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N(N - 1)}}. \tag{1.5}$$

Veličinu definovanú rovnicou (1.5) nazývame **stredná kvadratická chyba aritmetického priemeru**. Ako si možno všimnúť, táto chyba je $\sqrt{N}$-krát menšia ako stredná kvadratická chyba jedného merania (1.4). Kým δ_x sa s rastúcim počtom meraní veľmi nemení, $\bar{\delta}_x$ s rastúcim N pomaly klesá, čo znamená, že náš konečný výsledok je presnejší.

1.3 Rozdelenie nameraných dát

Predpokladajme, že nameriame N dát, napr. N vzdialeností šošovky od obrazu, ktorý vytvára. Medzi týmito dátami sa môžu niektoré hodnoty opakovať viackrát. Nech teda hodnota x_k sa nameria n_k-krát. Potom náš najlepší odhad, t. j. aritmetický priemer všetkých N meraní sa dá vyjadriť ako

$$\bar{x} = \frac{\sum_k x_k n_k}{N} = \sum_k x_k F_k. \tag{1.6}$$

V rovnici (1.6) suma cez k prebieha cez všetky rôzne hodnoty x_k a $F_k = n_k/N$ je pomer počtu meraní hodnoty x_k a celkového počtu meraní.

Súbor čísel F_k popisuje, ako sú naše merania rozdelené na základe ich rôznych možných hodnôt, preto tento súbor čísel nazývame rozdelením (našich výsledkov). Rozdelenie čísel F_k môžeme zobraziť graficky, keď na os x vynesieme hodnoty x_k a čísla F_k budeme reprezentovať čiarou výšky F_k nakreslenou nad x_k. Takýto graf nazývame čiarový histogram. Príklad čiarového histogramu je zobrazený na obr. 1.1. Tento histogram odpovedá nasledovným desiatim meraniam vzdialenosti šošovky od obrazu, ktorý produkuje, v centimetroch:

$$26, 24, 26, 28, 23, 24, 25, 24, 26, 25 \tag{1.7}$$

Obr. 1.1

Obr. 1.2

Vo väčšine meraní však nezískame celé čísla, ako v príklade (1.7). Pravdepodobnejší súbor hodnôt získaných v našom meraní bude napr.

$$26.4, 23.9, 25.1, 24.6, 22.7, 23.8, 25.1, 23.9, 25.3, 25.4 \tag{1.8}$$

Čiarový histogram odpovedajúci týmto hodnotám by pozostával z desiatich čiar rovnakej výšky, takže by nám nedal takmer nijakú užitočnú informáciu. Preto rozdelíme celý interval, z ktorého merania (1.8) nadobúdajú hodnoty, do menších podintervalov – binov o šírke Δ_k a spočítame, koľko meraní padne do príslušného binu. Napr. v prípade merania (1.8) spočítame, koľko meraní padne do binu medzi hodnotami 22 a 23, 23 a 24, atď. Výsledkom je binový histogram na obr. 1.2. Hodnota výšky f_k obdĺžnika nad binom Δ_k je zvolená tak, aby sa súčin $f_k\Delta_k$ rovnal pomeru počtu meraní, ktoré padnú do binu Δ_k, k celkovému počtu meraní N. $f_k\Delta_k$ je má teda v binovom histograme tú istú funkciu ako F_k v čiarovom histograme. Ešte dodajme, že ak by sme mali meranie s hodnotou hranice medzi dvoma binmi, môžeme napr. postupovať tak, že každému z oboch binov priradíme polovicu merania.

1.4 Limitné rozdelenie

Pre väčšinu experimentov platí, že keď zväčšujeme počet meraní, histogram reprezentujúci ich rozdelenie nadobúda určitý jednoznačný tvar. Napr. ak v našom pokuse so šošovkou nameriame 100 hodnôt jej vzdialenosti od obrazu, dostaneme histogram zobrazený na obr. 1.3 pripomínajúci funkciu s jedným maximom. Na obr. 1.4 je histogram reprezentujúci až 1000 meraní. V dôsledku tohoto počtu sme mohli zmenšiť veľkosť binov na polovicu, takže tvar histogramu sa bude blížiť k spojitej krivke. Čím viac meraní urobíme, tým viac sa rozdelenie našich dát bude blížiť k spojitej krivke a v limite nekonečného počtu meraní by bolo presne reprezentované touto krivkou, ktorú preto nazývame limitné rozdelenie.

Obr. 1.3

Obr. 1.4

Obr. 1.5

Limitné rozdelenie definuje funkciu $f(x)$, ktorej význam je zrejmý z obr. 1.5. V analógii s binovým histogramom veličina $f(x)dx$ je rovná pomeru počtu meraní, ktoré padnú do intervalu x, $x+dx$ a celkového počtu meraní a je reprezentovaná plochou obdĺžnika o veľmi malej šírke dx a výške $f(x)$ (obr. 1.5a). Ak chceme vypočítať pomer počtu meraní, ktoré padnú do intervalu medzi hodnotami a,b, musíme sčítať plochy všetkých takýchto úzkych obdĺžnikov nachádzajúcich sa medzi a a b, t. j. musíme vypočítať integrál

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{1.9}$$

ktorého hodnota sa rovná ploche ohraničenej krivkou $f(x)$, osou x a priamkami $y = a$, $y = b$ (obr. 1.5b). V teórii chýb sa súčin $f(x)dx$ interpretuje ako pravdepodobnosť, že jedno meranie veličiny x padne do intervalu x, $x+dx$. Potom (1.9) je pravdepodobnosť, že hocaké meranie padne do intervalu a,b. Pretože pravdepodobnosť, že nameriame hocakú hodnotu z intervalu $-\infty$, $+\infty$ je jedna, musí pre limitné rozdelenie $f(x)$ platiť

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{1.10}$$

Limitné rozdelenie, ktoré spĺňa podmienku (1.10), nazývame normalizované.

Z predchádzajúceho výkladu je zrejmé, že pravdepodobnosť $f(x)dx$ je analogická veličine F_k pre čiarové rozdelenie a veličine $f_k\Delta_k$ pre binové rozdelenie. Ak poznáme tvar funkcie $f(x)$, môžeme potom v analógii s týmito veličinami a rovnicou (1.6) vypočítať aritmetický priemer a strednú kvadratickú chybu jedného merania podľa vzťahov

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx, \tag{1.11}$$

$$\delta_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x)dx. \tag{1.12}$$

Pripomeňme, že tieto rovnice platia pre nekonečný počet meraní.

1.5 Normálne (Gaussovo) rozdelenie

Rôzne druhy meraní majú rôzne limitné rozdelenia. Skúsenosť ukazuje, že ak urobíme veľký počet meraní, ktoré sú zaťažené len náhodnými chybami, (systematické chyby sú zanedbateľné), budú naše merania rozdelené podľa symetrickej krivky tvaru zvona. Túto krivku dobre vystihuje funkcia

$$G_{X,\delta}(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/(2\delta^2)} \tag{1.13}$$

a v ďalšom výklade, ako aj v našich praktických cvičeniach, budeme predpokladať, že naše namerané hodnoty sú rozdelené podľa tejto funkcie. Funkcia (1.13) je normalizovaná a nazýva sa normálne alebo Gaussovo rozdelenie. Stred symetrie tohto rozdelenia leží v skutočnej hodnote X a jeho šírka, t. j. vzdialenosť osi symetrie od bodu na krivke, v ktorom sa mení zmysel jej polomeru krivosti, je δ (obr. 1.6). O poslednom tvrdení sa môžeme presvedčiť riešením rovnice, ktorú získame tak, že druhú deriváciu podľa x funkcie (1.13) položíme rovnú nule.

Obr. 1.6

Keď dosadíme rozdelenie (1.13) do (1.11) za $f(x)$, po jednoduchej integrácii dostaneme, že aritmetický priemer meraní veličiny x sa rovná jej skutočnej hodnote. Zdôraznime však, že tento výsledok platí presne len pre nekonečný počet meraní. V skutočnosti môžeme urobiť len konečný počet meraní. Ak predpokladáme, že sú rozdelené podľa normálneho rozdelenia, aritmetický priemer týchto meraní bude tým bližšie ku skutočnej hodnote, čím viac meraní urobíme. Podobne výpočtom inegrálu (1.12), kde položíme $f(x) = G_{X,\delta}(x)$, sa dá ľahko ukázať (použitím substitúcie a metódy per partes), že šírka Gaussovho rozdelenia sa rovná strednej kvadratickej chybe jedného merania δ_x pre nekonečný počet meraní. Pre konečný počet meraní je táto rovnosť splnená tým lepšie, čím viac meraní máme k dispozícii.

Ak je limitné rozdelenie našich meraní normálne, potom, ako vyplýva z predošlého textu a integrálu (1.9), pravdepodobnosť $P(\pm\delta)$, že jedno meranie padne do intervalu $X-\delta$, $X+\delta$, je daná integrálom

$$P(\pm\delta) = \int_{X-\delta}^{X+\delta} G_{X,\delta}(x)dx = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{X-\delta}^{X+\delta} e^{-(x-X)^2/(2\delta^2)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-z^2/2}dz. \tag{1.14}$$

Poslednú rovnosť v (1.14) sme získali úpravou zavedením substitúcie $(x-X)/\delta = z$.

Integrál (1.14) sa nedá vyjadriť analyticky. Jeho numerickým výpočtom dostaneme približne číslo 0.68. To znamená, že pravdepodobnosť, že jedno naše meranie padne do intervalu $X-\delta$, $X+\delta$, je 68%, čo je tvrdenie uvedené v časti 1.1. Analogicky môžeme vypočítať pravdepodobnosť, že jedno naše meranie padne do intervalu ľubovoľnej šírky opísaného okolo skutočnej hodnoty X, t. j. $X-t\delta$, $X+t\delta$, kde t je ľubovoľné kladné číslo. Táto pravdepodobnosť je

$$P(\pm t\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}dz. \tag{1.15}$$

Integrál (1.15) sa nazýva funkcia chýb alebo normálny integrál chýb a označuje sa $\mathrm{erf}(t)$. Pravdepodobnosť daná jeho hodnotou sa rýchlo blíži k 100% so stúpajúcim t. Pre $t = 2$ je táto pravdepodobnosť 95.4%, pre $t = 3$ je to 99.7%.

Na záver ukážeme, že ak sa merania veličiny x riadia normálnym rozdelením (1.13), najlepší odhad jej skutočnej hodnoty je aritmetický priemer všetkých meraní. Vyjadrime si teda najskôr pravdepodobnosti, že nameriame hodnoty x_1, x_2,..., x_N, ktoré sme v skutočnosti už namerali: pravdepodobnosť $P(x_1)$, že nameriame hodnotu z intervalu x_1, $x_1 + dx_1$ je

$$P(x_1) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1-X)^2/2\delta^2} dx_1. \tag{1.16}$$

Podobne by sme vyjadrili pravdepodobnosti namerania všetkých ostatných hodnôt x_2,..., x_N. Potom pravdepodobnosť, že nameriame práve súbor údajov x_1, x_2,..., x_N, je daná súčinom pravdepodobností

$$\begin{aligned} P(x_1, ..., x_N) &= P(x_1) \times P(x_2) \times ... \times P(x_N) \\ &= \frac{1}{(\delta\sqrt{2\pi})^N} e^{-\sum_{i=1}^{N}(x_i-X)^2/(2\delta^2)} dx_1 dx_2 ... dx_N. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Teraz použijeme princíp maximálnej pravdepodobnosti, ktorý v tomto prípade hovorí, že najlepší odhad skutočnej hodnoty X získame pre taký súbor hodnôt x_1, x_2,..., x_N, pre ktorý je pravdepodobnosť (1.17) maximálna. Toto bude splnené vtedy, keď suma v exponente exponenciálnej funkcie v (1.17) bude minimálna a toto minimum nájdeme tak, že derivujeme $\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2$ podľa X a výsledok položíme rovný nule, t. j.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - X) = 0. \tag{1.18}$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že najlepší odhad skutočnej hodnoty X veličiny, ktorá podlieha normálnemu rozdeleniu, je aritmetický priemer všetkých N meraní $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{N} x_i)/N$.

Podobne, keby sme položili rovnú nule deriváciu funkcie

$$\frac{1}{\delta^N} e^{-\sum_{i=1}^{N}(x_i-X)^2/(2\delta^2)} \tag{1.19}$$

podľa δ, dostali by sme pre najlepší odhad šírky Gaussovho rozdelenia

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X - x_i)^2}{N}}. \tag{1.20}$$

Pri konečnom počte meraní však skutočnú hodnotu X nepoznáme. Máme však pre ňu jej najlepší odhad – aritmetický priemer všetkých meraní. Keď teda dosadíme do (1.20) za X aritmetický priemer, dostaneme vzťah pre strednú kvadratickú chybu jedného merania (1.3). To znamená, že pri konečnom počte meraní, ktoré sú normálne rozdelené, je najlepším odhadom pre šírku tohto rozdelenia stredná kvadratická chyba jedného merania (1.3).

1.6 Praktický záver

Pre lepšiu orientáciu pri výpočtoch uvádzame v tejto časti vzorce, ktoré budú používané prakticky v každej laboratórnej úlohe. Predovšetkým je to vyjadrenie pre strednú kvadratickú chybu aritmetického priemeru N meraní veličiny x, t. j. rovnica (1.5)

$$\bar{\delta}_x = \frac{\delta_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}}, \tag{1.21}$$

kde x_i je i-te meranie. Na základe (1.21) možno dalej vypočítať **strednú pravdepodobnú chybu aritmetického priemeru** definovanú výrazom

$$\bar{\vartheta}_x = \frac{2}{3}\bar{\delta}_x \tag{1.22}$$

a **strednú maximálnu chybu aritmetického priemeru** definovanú rovnicou

$$\bar{\chi}_x = 3\bar{\delta}_x. \tag{1.23}$$

Literatúra

Josef Horák, Praktická fyzika
J. R. Taylor, An Introduction to Error Analysis, University Science Books, 1997

2 Určenie objemu valčeka

2.1 Teoretický úvod

Na obr. 2.1 je zobrazený valček o výške h a priemere podstavy d. Našou úlohou je zistiť z merania týchto veličín jeho objem, ako aj nepresnosť, t. j. chybu, ktorou je určenie objemu zaťažené.

Obr. 2.1

Ako je známe, objem valčeka vypočítame podľa vzťahu

$$V = \pi \frac{d^2}{4} h. \tag{2.1}$$

Ako však vieme (pozri časť "Chyby merania"), na spoľahlivé určenie hodnôt h a d, a teda aj objemu V a chyby, ktorej sa pri určení objemu dopúšťame, nestačí jedno meranie. Veličiny h a d preto zmeriame niekoľkokrát – N-krát – a z týchto N meraní určíme aritmetické priemery $\bar{h}$ a $\bar{d}$, ktoré reprezentujú naše najlepšie odhady skutočných hodnôt výšky a priemeru podstavy valčeka. Potom náš najlepší odhad objemu valčeka je číslo

$$\bar{V} = \pi \frac{\bar{d}^2}{4} \bar{h}. \tag{2.2}$$

Samozrejme, že by sme mohli postupovať aj tak, že by sme pre každú dvojicu meraní h_i a d_i vypočítali príslušný objem V_i a za náš najlepší odhad by sme zobrali aritmetický priemer všetkých N vypočítaných objemov. Potom chybu merania objemu valčeka by sme mohli vypočítať s použitím vzorca (**??**), kde by sme dosadili za x_i objemy V_i a za $\bar{V}$ aritmetický priemer všetkých N objemov. V tejto úlohe však budeme počítať náš najlepší odhad skutočného objemu valčeka pomocou rovnice (2.2) a príslušnú chybu na základe nasledujúcich úvah.

Predpokladajme, že chceme meraním zistiť hodnotu fyzikálnej veličiny f, ktorá je funkciou veličín x, y, z, … Veličinu $f(x, y, z, ...)$ však nevieme priamo zmerať. Vieme ale priamo zmerať hodnoty veličín x, y, z,…, a na základe týchto meraní vieme odhadnúť príslušné chyby δ_x, δ_y, δ_z, … Potom hodnotu f a chybu δ_f, ktorou je naše meranie zaťažené, môžeme zistiť výpočtom zo zmeraných hodnôt x, y, z,…, a z chýb, s ktorými sme ich odmerali. Bez dôkazu uvádzame vzorec pre chybu merania f

$$\delta_f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 \delta_x^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \delta_y^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2 \delta_z^2 + ...} \tag{2.3}$$

V rovnici (2.3) symbol $\partial f/\partial x$ je parciálna derivácia funkcie $f(x, y, z, ...)$ podľa x, $\partial f/\partial y$ je parciálna derivácia $f(x, y, z, ...)$ podľa y, atď.

Poznámka: Parciálna derivácia funkcie viac premenných podľa jednej z premenných znamená, že všetky výrazy obsahujúce ostatné premenné považujeme za konštanty. Napr. parciálna derivácia funkcie $g(x, y) = x^3y + y^2$ podľa x je $\partial g(x, y)/\partial x = 3x^2y$, pretože výrazy y a y^2 sú vzhľadom na túto deriváciu konštanty.

V našom meraní objemu valčeka funkciou je objem V a premenné sú h a d. Na základe (2.3) potom chyba, s ktorou objem určíme, je

$$\delta_V = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial h})^2\delta_h^2 + (\frac{\partial V}{\partial d})^2\delta_d^2}, \tag{2.4}$$

kde parciálne derivácie sú dané výrazmi

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi\frac{d^2}{4} = \frac{V}{h}, \qquad \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{2\pi hd}{4} = \frac{2V}{d}. \tag{2.5}$$

Skombinovaním rovníc (2.4) a (2.5) dostaneme pre chybu objemu vyjadrenie

$$\delta_V = V\sqrt{(\frac{\delta_h}{h})^2 + (\frac{2\delta_d}{d})^2}. \tag{2.6}$$

Do tohto vzorca dosadíme za V číslo $\bar{V}$ dané rovnicou (2.2), za h a d ich aritmetické priemery $\bar{h}$ a $\bar{d}$ a za chyby merania výšky a priemeru podstavy čísla vypočítané zo vzorcov

$$\bar{\delta}_h = \sqrt{\frac{(\bar{h}-h_1)^2 + (\bar{h}-h_2)^2 + ... + (\bar{h}-h_N)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{h}-h_i)^2}{N(N-1)}} \tag{2.7}$$

$$\bar{\delta}_d = \sqrt{\frac{(\bar{d}-d_1)^2 + (\bar{d}-d_2)^2 + ... + (\bar{d}-d_N)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{d}-d_i)^2}{N(N-1)}}. \tag{2.8}$$

Vyjadrenia (2.7) a (2.8) predstavujú stredné kvadratické chyby aritmetických priemerov $\bar{h}$ a $\bar{d}$ a získali sme ich aplikovaním vzorca (1.5) na naše meranie. Konečné vyjadrenie chyby, s ktorou v tomto meraní určíme objem valčeka, je teda

$$\bar{\delta}_V = \bar{V}\sqrt{(\frac{\bar{\delta}_h}{\bar{h}})^2 + (\frac{2\bar{\delta}_d}{\bar{d}})^2}. \tag{2.9}$$

2.2 Postup merania a spracovanie výsledkov

1. Mikrometrom zmeriame 10-krát výšku h a priemer podstavy d valčeka v milimetroch. Výsledky meraní zapíšeme do tabuľky 2.1 Najmenší dielik na mikrometri je stotina milimetra. Môžeme teda merať s presnosťou na tisíciny milimetra, ktoré stanovíme odhadom. Chyby merania h a d by teda rádovo mali byť tiež tisíciny milimetra.

2. Vypočítame aritmetické priemery $\bar{h}$ a $\bar{d}$ a stredné kvadratické chyby $\bar{\delta}_h$ a $\bar{\delta}_d$ podľa vzorcov (2.7) a (2.8). Keďže tieto hodnoty predstavujú medzivýsledky a nie konečné výsledky, ponecháme v nich viac desatinných miest, ako by sme mali, keby sme ich zaokrúhlili (pravidlá zaokrúhľovania sú vysvetlené v časti "Platné číslice"). Napr. štyri až päť. Získané hodnoty uvedieme v tvare

$$\text{výška valčeka} = \bar{h} \pm \bar{\delta}_h, \tag{2.10}$$
$$\text{priemer valčeka} = \bar{d} \pm \bar{\delta}_d. \tag{2.11}$$

Upozorňujeme, že chyby merania $\bar{\delta}_h$ a $\bar{\delta}_d$ sú udané v tých istých jednotkách, ako veličiny, ktorým korešpondujú. Toto pravidlo platí nielen v tomto prípade, ale aj pri meraní ľubovoľnej fyzikálnej veličiny.

3. Hodnoty získané v bode 2 dosadíme do vzorcov (2.2) a (2.9). Chybu $\bar{\delta}_V$ zaokrúhlime na jednu až dve platné číslice a objem $\bar{V}$ na toľko desatinných miest, koľko bude mať chyba (pozri časť "Platné číslice"). Tieto konečné výsledky uvedieme v tvare

$$\text{objem valčeka} = \bar{V} \pm \bar{\delta}_V. \tag{2.12}$$

4. Urobíme diskusiu o reálnosti dosiahnutých výsledkov.

Tabuľka 2.1

číslo merania	d_i [mm]	$\bar{d} - d_i$ [mm]	$(\bar{d} - d_i)^2$ [mm^2]	h_i [mm]	$\bar{h} - h_i$ [mm]	$(\bar{h} - h_i)^2$ [mm^2]

3 Meranie doby kmitu kyvadla postupnou metódou

Metóda postupných meraní sa používa na meranie periódy časovo alebo priestorovo periodických dejov a štruktúr. V týchto praktických cvičeniach budeme postupnou metódou merať periódu kmitania, t. j. dobu kmitu, fyzikálneho kyvadla. Na prvý pohľa by sa mohlo zdať, že stačí zmerať dobu niekoľkých kmitov a túto potom vydeliť počtom kmitov. Takto by sme však mali k dispozícii na určenie periódy kmitania kyvadla len jedno meranie. Nemohli by sme ho teda štatisticky vyhodnotiť, t. j. vypočítať chybu merania na základe vzorcov uvedených v predchádzajúcich častiach. Preto využijeme pri tomto meraní postupnú metódu.

Meranie urobíme stopkami, ktoré zaznamenávajú medzičasy. Pomocou nich zaznamenáme medzičas zakaždým, keď kyvadlo vykoná 10 kmitov až po 100 kmitov, t. j. odmeriame časy, za ktoré kyvadlo urobí 10, 20, … až 100 kmitov. Takto získané časy rozdelíme na dve polovice. Prvú polovicu budú tvoriť doby trvania 10, 20,…, 50 kmitov a tieto dáta zapíšeme do druhého stĺpca tabuľky 3.1. Druhú polovicu – doby trvania 60, 70, …, 100 kmitov – zapíšeme do štrtého stĺpca tabuľky 3.1. Ako je teda zrejmé, namerané a vypočítané dáta budú zanamenané v tabuľke 3.1 v piatich riadkoch a index i bude nadobúdať hodnoty 1, 2, …, 5.

Tabuľka 3.1

č.m. i	$t_i = i \times 10T$ [s]	č.m. i+5	$t_{i+5} = (i+5) \times 10T$ [s]	$t^i_{50} = t_{i+5} - t_i$ [s]	$T_i = t^i_{50}/50$ [s]

Z nameraných a zaznamenaných údajov najskôr vypočítame rozdiely dvojíc časov z druhej a prvej polovice súboru meraní, ktoré majú tú istú pozíciu, t. j. od každej hodnoty vo štvrtom stĺpci tabuľky 3.1 odčítame hodnotu z jej druhého stĺpca nachádzajúcu sa v tom istom riadku. Takto dostaneme čísla t^i_{50}, ktoré zapíšeme do piateho stĺpca tabuľky 3.1. Je jasné, že čísla t^i_{50} zodpovedajú dobe trvania 50 kmitov a časy T_i, uvedené v poslednom stĺpci tabuľky 3.1, dobe jedného kmitu – jednej perióde. Naším konečným výsledkom pre dobu kmitu kyvadla bude aritmetický priemer z hodnôt $T_1, T_2, \ldots, T_5$. Chybu merania – strednú kvadratickú chybu aritmetického priemeru $\bar{T}$ – vypočítame podľa rovnice (1.5) pre $N = 5$. Príslušný vzorec je

$$\bar{\delta}_T = \sqrt{\frac{(\bar{T}-T_1)^2 + (\bar{T}-T_2)^2 + ... + (\bar{T}-T_5)^2}{5(5-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{T}-T_i)^2}{20}}. \qquad (3.1)$$

Výsledok zaokrúhlený podľa známych pravidiel (pozri časť "Platné číslice") uvedieme v tvare

$$\text{perióda kyvadla} = \bar{T} \pm \bar{\delta}_T. \qquad (3.2)$$

Postupná metóda teda umožňuje využitie viacerých meraní na určenie periódy periodického deja, ktorú získame na základe štatistického spracovania a vyhodnotenia týchto meraní.

Literatúra

Jaromír Brož a kolektív, Základy fyzikálních měření, Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1983

Prof. Ing. Ivo Čáp, CSc., Vyhodnocovanie chyby merania, doplnkový študijný text, Jednota slovenských matematikov a fyzikov - pobočka Žilina, 1994

4 Platné číslice

Pod prvou platnou číslicou čísla rozumieme prvú číslicu zľava v tomto čísle rôznu od nuly. Napr. v čísle 0.02347 je prvou platnou číslicou číslica 2 na mieste stotín, druhou platnou číslicou je číslica 3 na mieste tisícin, atď. Iným príkladom môže byť číslo 6053.17. Tu je prvou platnou číslicou číslica 6 na mieste tisícok, druhou platnou číslicou je číslica 0 na mieste stoviek, atď. Zaokrúhliť čísla uvedené v týchto dvoch príkladoch napr. na dve platné číslice by znamenalo zaokrúhlenie na 0.023 a 6100.

V každom fyzikálnom experimente môžeme merať danú veličinu len s určitou presnosťou. Preto uvádzať chyby na príliš veľa platných číslic nemá zmysel. Napr. keď pri meraní tiažového zrýchlenia g uvedieme chybu δ_g ako 0.02347 ms^{-2}, znamená to, že sa dopúšťame pri tomto meraní chyby už na úrovni stotín ms^{-2}. Nemá teda zmysel ponechávať v tomto odhade chyby viac ako jednu, nanajvýš dve platné číslice. Preto základné pravidlo pri odhade chýb znie: Chybu merania zaokrúhľujeme takmer vždy na jednu platnú číslicu. Tu však máme na mysli chybu konečného výsledku. Ak výpočtu konečného výsledku predchádzali medzivýpočty, v týchto ponechávame aspoň o jednu platnú číslicu viac, t. j. dve až tri, ak ide o chyby.

Postup pri zaokrúhľovaní konečných výsledkov merania je teda nasledujúci: Najskôr zaokrúhlime chybu merania danej veličiny na jednu, prípadne dve platné číslice, a potom zokrúhlime nameranú hodnotu veličiny na toľko desatinných miest, koľko má chyba. Napr. ak zistíme výpočtom hodnotu rýchlosti 6178.15 ms^{-1} a chyba zaokrúhlená na jednu platnú číslicu je 30 ms^{-1}, potom konečný výsledok bude mať tvar

$$\text{rýchlost}' = (6180 \pm 30)\ \mathrm{ms}^{-1}. \tag{4.1}$$

Poznamenajme ešte, že ak výsledkom nášho merania je veľké číslo, je názornejšie uviesť toto číslo a príslušnú chybu v tej istej forme. Napr. pri meraní modulu pružnosti v ťahu ocele môžeme mať chybu 4×10^9 Pa a hodnotu 2.13×10^{11} Pa. Je oveľa jasnejšie uviesť tento výsledok vo forme

$$\text{modul pružnosti} = (213 \pm 4) \times 10^9\ \mathrm{Pa}, \tag{4.2}$$

ako

$$\text{modul pružnosti} = (2.13 \times 10^{11} \pm 4 \times 10^9)\ \mathrm{Pa}. \tag{4.3}$$

Literatúra

J. R. Taylor, An Introduction to Error Analysis, University Science Books, 1997